Московский Государственный Технический Университет
имени Н. Э. Баумана

Домашнее задание по физике для студентов II курса IV семестра всех факультетов

Кафедра «Физика» МГТУ им. Н. Э. Баумана
2006

Официальный сайт кафедры — http://fn.bmstu.ru/phys

Содержание

Часть первая

1.1. Американский физик Р. Хофштадтер (*Robert Hofstadter*) наблюдал дифракцию электронов с энергией $E = 750$ МэВ на ядрах ^{40}Ca. Согласно волновой теории при дифракции волны на сфере радиуса R минимумы интенсивности наблюдаются при углах дифракции θ, определяемых выражением $\sin\theta = m \cdot 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{R}$, где m — целое число, а λ — длина волны. В данном опыте дифракционному минимуму для $m = 3$ отвечал угол дифракции $\theta = 48°$. Считая, что ядро имеет сферическую форму, найдите радиус ядра ^{40}Ca.

1.2. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0, чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l? Решить задачу для электронов и протонов в случае $l = 10^{-18}$ м, что соответствует радиусу слабого взаимодействия.

1.3. При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

1.4. Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100$ пм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути прямоугольный порог высотой $U = 100$ эВ. Определите длину волны де Бройля частицы после прохождения порога.

1.5. Поток нейтронов проходит через узкие радиальные щели в двух дисках из кадмия, поглощающего нейтроны. Диски насажены на общую ось так, что щели повернуты друг относительно друга на угол α. Диски вращаются с угловой скоростью $\omega = 400$ рад/с, расстояние между ними $L = 1$ м. Найти угол α, если длина волны де Бройля пропускаемых таким устройством нейтронов равна $\lambda = 0{,}1$ нм.

1.6. Пучок электронов, прошедший ускоряющую разность потенциалов U, попадает из вакуума в металл, внутренний потенциал которого $\varphi = 5$ В. Найдите:

а) показатель преломления металла n_e для электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 50\,\text{В}$;

б) отношение U/φ, при котором показатель преломления отличается от единицы не более чем на $\eta = 1\%$.

1.7. Условие Брэгга-Вульфа с учётом преломления электронных волн в кристалле имеет вид $2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = k\lambda$, где d — межплоскостное расстояние, n_e — показатель преломления, θ — угол скольжения, k — порядок отражения. Найдите с помощью этого условия угол θ, если пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 85\,\text{В}$, образует максимум 2-го порядка при брэгговском отражении от кристаллических плоскостей с $d = 0{,}204\,\text{нм}$ под углом $\theta = 30°$. Внутренний потенциал монокристалла серебра $\varphi = 15\,\text{В}$.

1.8. Коллимированный пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 30\,\text{кВ}$, падает нормально на тонкую поликристаллическую фольгу золота. Постоянная кристаллической решётки золота $d = 0{,}41\,\text{нм}$. На фотопластинке, расположенной за фольгой на расстоянии $l = 20\,\text{см}$ от неё, получена дифракционная картина, состоящая из ряда концентрических окружностей. Определите:

а) длину волны де Бройля электронов λ;

б) брэгговский угол $\theta_Б$, соответствующий первой окружности;

в) радиус r первой окружности.

1.9. Покажите, что в атоме водорода и водородоподобных атомах на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом n.

1.10. Узкий пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U, падает нормально на поверхность некоторого монокристалла. Под углом $\theta = 55°$ к нормали к поверхности кристалла наблюдается максимум отражения электронов первого порядка. Определите U, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла составляет $d = 0{,}2\,\text{нм}$.

1.11. При увеличении энергии электрона на $\Delta E = 200\,\text{эВ}$ его дебройлевская длина волны изменилась в $\eta = 2{,}0$ раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

1.12. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы a. Найти значения энергии частицы, имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуволн.

1.13. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре.

1.14. Частица массой m и зарядом q, имеющая дебройлевскую длину волны λ_0 влетает в пространство между обкладками плоского конденсатора параллельно им. Разность потенциалов между обкладками U, расстояние между ними d, длина пластин l. Найдите дебройлевскую длину волны частицы λ_1 после прохождения через конденсатор.

1.15. Две одинаковые частицы массы m с дебройлевскими длинами волн λ_1 и λ_2 движутся перпендикулярно друг другу. Найти дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс.

1.16. Нейтрон с кинетической энергией $E_K = 0{,}25\,\text{эВ}$ испытал упругое соударение с первоначально покоившимся ядром атома ^4He. Найдите длины волн обеих частиц в системе их центра масс до и после соударения.

1.17. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем: в цилиндре радиусом $R = 10\,\text{см}$ и длиной $L = 1{,}0\,\text{м}$ делается винтовой паз с поворотом на на угол $\varphi = 30°$. Цилиндр вращается с частотой $n = 3000\,\text{об}/\text{мин}$. Определите дебройлевскую длину волны нейтронов, пропускаемых этим монохроматором. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра.

1.18. Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью ширины $b = 1{,}0\,\text{мкм}$. Определите скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние $l = 50\,\text{см}$, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 0{,}36\,\text{мм}$.

1.19. Параллельный поток электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 25\,\text{В}$, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50\,\text{мкм}$. Определите расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $l = 100\,\text{см}$ от щелей.

1.20. При пропускании пучка нейтронов от ядерного реактора через блок прессованного графита все нейтроны с длинами волн де Бройля короче $\lambda_0 = 0{,}67\,\text{нм}$ испытывают интерференционное отражение Брэгга-Вульфа. Проходят через блок только медленные, так называемые холодные нейтроны. Определите максимальную температуру, соответствующую самым коротким волнам де Бройля нейтронов, пропускаемых графитом, а также вычислите постоянную d решётки графита.

Часть вторая

2.1. Считая, что минимальная энергия E нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна $10\,\text{МэВ}$, оцените, исходя из соотношения неопределённостей, линейные размеры ядра.

2.2. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода E_K составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределённостей, оцените минимальные линейные размеры атома.

2.3. Покажите, используя соотношение неопределённостей, что электроны не могут входить в состав атомного ядра. Линейные размеры ядра считать равными $5 \cdot 10^{-15}$ м.

2.4. Покажите, что соотношения неопределённостей позволяют сделать вывод об устойчивости атома, т. е. о том, что электрон при движении по круговой орбите не может упасть на ядро.

2.5. Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределённость кинетической энергии порядка $1{,}6 \cdot 10^{-4}$. Оцените, во сколько раз неопределённость координаты такой частицы больше её дебройлевской длины волны.

2.6. Используя соотношение неопределённостей энергии и времени, определите среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии τ, если естественная ширина спектральной линии излучения атома при переходе его из возбуждённого состояния в основное $\Delta\lambda = 20$ фм, а длина волны излучения $\lambda = 600$ нм.

2.7. Частица массой m_0 движется в потенциальном поле, в котором её потенциальная энергия равна $U = \frac{kx^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Оцените с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию частицы в этом поле.

2.8. Оцените относительную ширину $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбуждённом состоянии $\tau = 10^{-8}$ с и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 500$ нм.

2.9. Из ускорителя через щель выводится короткий сгусток протонов с энергией $E = 100$ кэВ. Оцените минимально достижимую ширину пучка протонов на расстоянии $L = 100$ м от выходной щели.

2.10. Оцените с помощью соотношения неопределённостей Гейзенберга неопределённость скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $a = 10^{-10}$ м. Сравните полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите.

2.11. Пучок протонов из ускорителя выводится через отверстие диаметром d. Используя соотношение неопределённостей, найдите минимальный размер пучка на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от отверстия, если радиус орбиты в ускорителе $r = 10$ см, а величина магнитного поля в момент вывода $B = 0{,}3$ Тл.

2.12. Оцените минимально достижимый диаметр d пятна, создаваемого на экране пучком электронов, если время пролёта от коллиматора до экрана $\tau = 10^{-8}$ с.

2.13. С помощью соотношения неопределённостей оцените минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200° \, C$. Расстояние от выходной щели до детектора $L = 1$ м.

2.14. Поток электронов с дебройлевской длиной волны $\lambda = 11$ мкм падает нормально на прямоугольную щель шириной $b = 0{,}10$ мм. Оцените с помощью соотношения неопределённостей угловую ширину пучка за щелью.

2.15. Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку маленьких капелек тумана, размер которых $d = 1$ мкм. Можно ли, наблюдая след электрона с кинетической энергией $E_K = 1$ кэВ, обнаружить отклонение в его движении от классических законов?

2.16. С помощью соотношения неопределённостей оцените минимальную энергию E_1, которой может обладать частица массы m, находящаяся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной a.

2.17. Используя соотношения неопределённостей Гейзенберга, получите оценочное соотношение, определяющее границы применимости классической механики для описания движения частицы в некоторой области пространства с характерным линейным размером L.

2.18. Используя соотношение неопределённостей энергии и времени, определите длину волны излучения λ, если среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии $\tau = 10^{-8}$ с, а естественная ширина спектральной линии излучения атома при переходе его из возбуждённого состояния в основное $\Delta\lambda = 20$ фм.

2.19. Предполагая, что неопределённость координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определите относительную неопределённость $\frac{\Delta p}{p}$ импульса этой частицы.

2.20. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределённости Δx её координаты, которая соответствует относительной неопределённости импульса в 1%?

Часть третья

3.1. Пользуясь решением задачи о гармоническом осцилляторе, найдите энергетический спектр частицы массы m_0 в потенциальной яме вида

$$U(x) \quad = \quad \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{kx^2}{2}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Здесь $k = m_0\omega_0^2$, а ω_0 — собственная частота классического гармонического осциллятора.

3.2. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите массу частицы, если ширина ямы a и разность энергий второго и первого возбуждённых состояний равна ΔE.

3.3. Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x и y частицы лежат в пределах $0 < x < a$, $0 < y < b$, где a и b — стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области:

а) $0 < x < \frac{a}{4}$ $\quad (P_1)$;
б) $0 < y < \frac{b}{4}$ $\quad (P_2)$;
в) $0 < x < \frac{a}{4}$, $0 < y < \frac{b}{4}$ $\quad (P_3)$.

Убедитесь, что $P_1 \cdot P_2 = P_3$.

3.4. Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбуждённом состоянии. Сторона ямы равна a. Определите вероятность нахождения частицы в области:

а) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$ $\quad (P_1)$;
б) $\frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$ $\quad (P_2)$;
в) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$, $\frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$ $\quad (P_3)$.

Убедитесь, что $P_1 \cdot P_2 = P_3$.

3.5. Частица массой m_0 находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите энергию частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно w_m.

3.6. Частица массой m_0 находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найдите длину ребра куба, если разность энергий 6-го и 5-го уровней равна ΔE. Чему равна кратность вырождения 6-го и 5-го уровней?

3.7. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющей ширину a. В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и второго возбуждённого состояний?

3.8. Квантовый гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Найдите вероятность P обнаружения частицы в области $-a < x < a$, где a — амплитуда классических колебаний.

3.9. Частица массой m_0 находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$ в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A \exp(-\alpha x^2)$, где A и α — заданные постоянные ($\alpha > 0$). Найдите энергию частицы и вид функции $U(x)$, если $U(0) = 0$

3.10. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для первого и второго возбуждённых состояний.

3.11. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите число dN энергетических уровней в интервале энергий $(E, E + dE)$, если уровни расположены весьма густо.

3.12. Частица массы m находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно P_m. Найдите ширину a ямы и энергию E частицы в данном состоянии.

3.13. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите ширину ямы, если минимальное энергетическое расстояние между уровнями электрона в яме равно тепловой энергии kT при комнатной температуре.

3.14. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите квантовое число n энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним уровней (верхнего и нижнего) относятся как $\eta : 1$.

3.15. Частица массы m локализована в трёхмерной сферически симметричной потенциальной яме радиуса a с непроницаемыми стенками. Найдите волновые функции и уровни энергии частицы для состояний, в которых волновая функция зависит только от r.
☞ **Указание.** Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$.

3.16. Частица массы m локализована в трёхмерной сферически симметричной потенциальной яме радиуса a с непроницаемыми стенками. Для состояния, в котором волновая функция частицы зависит только от r, максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно P_m. Найдите радиус ямы r и энергию частицы E в данном состоянии.
☞ **Указание.** Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$.

3.17. Электрон находится в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Найдите радиус ямы a, если для сферически симметричного состояния электрона значение минимальной энергии равно E_0.
☞ **Указание.** Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$.

3.18. Частица находится в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Считая состояние частицы сферически симметричным, найдите массу частицы m, если радиус ямы равен r_0, а минимальная энергия частицы E_0.
☞ **Указание.** Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$.

3.19. Определите разность соседних уровней энергии ΔEдля частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме при больших значениях квантового числа n. Полученный результат используйте для оценки разности энергий соседних уровней молекул азота при комнатной температуре в сосуде. Масса молекулы азота $m = 2{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг, а линейный размер сосуда $a = 0{,}1$ м. Сравните полученный результат с кинетической энергией поступательного движения молекул азота.

3.20. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите ширину ямы a, если разность энергий второго и первого возбуждённых состояний $\Delta E = 5$ эВ.

Часть четвёртая

4.1. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ. Оцените, при какой ширине барьера d коэффициент прохождения электрона через барьер D будет равен 0,2?

4.2. Электрон, обладающий энергией $E = 50$ эВ, встречает на своем пути потенциальный порог высотой $U = 20$ эВ. Определите вероятность отражения электрона от этого порога.

4.3. Микрочастица падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причём $E > U_0$. Найдите коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности D этого барьера. Убедитесь, что значения этих коэффициентов не зависят от направления движения падающей частицы (слева направо или справа налево).

4.4. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через треугольный потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0\left(1 - \frac{x}{d}\right), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$. Такой вид потенциального барьера соответствует барьеру, преодолеваемому электронами при холодной (полевой) эмиссии из металла.

4.5. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ U_0\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant d, \\ 0, & \text{при } x > d. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

4.6. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -d, \\ U_0\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), & \text{при } -d \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

4.7. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} U_0\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right), & \text{при } |x| \leqslant d, \\ 0, & \text{при } |x| > d. \end{cases}$$

Такой вид потенциального барьера реально отражает барьер деления тяжёлых ядер.

4.8. Считая, что радиоактивный α-распад происходит за счёт туннелирования α-частицы через потенциальный барьер, получите закон радиоактивного α-распада, определяющий зависимость числа нераспавшихся ядер от времени распада t. Скорость α-частицы в материнском ядре равна v, радиус ядра — r_0, коэффициент прозрачности потенциального барьера — D, число нераспавшихся ядер в начальный момент времени — N_0.

4.9. Частица массы m_0 падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причём $E < U_0$. Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, т. е. на расстояние от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

4.10. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \ll 1$.

4.11. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0. Найдите коэффициент прохождения ямы D для этой частицы.

4.12. Электрон с энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0. Найдите значения энергии E, при которых электрон будет беспрепятственно проходить через яму. Убедитесь, что это будет происходить при условии, что ширина ямы a равна целому числу дебройлевских полуволн частицы внутри ямы. Вычислите минимальную энергию электрона E_{min} при $U_0 = 10$ эВ и $a = 0{,}25$ нм.

4.13. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму глубиной U_0. Найдите ширину ямы a, при которой коэффициент отражения частицы от ямы R максимален.

4.14. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной a. Энергия частицы $E > U_0$. Найдите коэффициент «надбарьерного» отражения R и коэффициент прозрачности барьера D для этой частицы.

4.15. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной a. Энергия частицы $E > U_0$. Найдите значения энергии частицы E, при которых она будет беспрепятственно проходить через этот барьер. Вычислите первые два значения E для электрона при $U_0 = 10{,}0$ эВ и $a = 0{,}50$ нм.

4.16. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \gg 1$.

4.17. В 1921 г. немецкий физик К. Рамзауэр (*C. Ramsauer*) обнаружил аномальную «прозрачность» атомов криптона для электронов с энергией $E = 0{,}6$ эВ. Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Моделируя поле атома с помощью одномерной прямоугольной потенциальной ямы глубиной $U_0 = 2{,}5$ эВ, оцените радиус атома криптона.

4.18. Электрон с энергией $E = 1{,}5$ эВ находится в одномерной потенциальной яме шириной $a = 10^{-10}$ м. С одной стороны ямы потенциальная энергия $U(x)$ бесконечна, а с другой стороны выйти из ямы электрону мешает прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 2$ эВ и шириной $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените время жизни τ электрона в яме.

4.19. Протон с энергией $E = 1{,}5$ эВ находится в одномерной потенциальной яме шириной $a = 10^{-10}$ м. С одной стороны ямы потенциальная энергия $U(x)$ бесконечна, а с стороны выйти из ямы протону мешает прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 2$ эВ и шириной $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените время жизни протона τ в яме. Сравните его со временем существования Вселенной ($\approx 15 \cdot 10^9$ лет).

4.20. Оцените коэффициент прозрачности потенциального барьера, преодолеваемого α-частицей при α-распаде. Зарядовое число ядра равно Z. Потенциальный барьер $U(r)$ имеет вертикальную стенку при $r = R$ (радиус ядра) и определяется законом Кулона при $r \geqslant R$. Энергия вылетающей α-частицы E много меньше высоты барьера.

Часть пятая

5.1. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\Psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r — расстояние электрона от ядра, a — радиус первой боровской орбиты. Определите среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона от ядра в этом состоянии.

5.2. Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбуждённом состоянии. Найдите среднее значение квадрата импульса частицы $\langle p^2 \rangle$, если сторона ямы равна a.

5.3. Частица массой m_0 находится в одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбуждённом состоянии. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы $\langle E_K \rangle$, если ширина ямы равна a.

5.4. Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны $m\hbar$, где $m = l, l-1, \ldots, -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятны и оси равноправны, покажите, что в состоянии с определённым значением l среднее значение квадрата момента импульса $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$.

5.5. В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$), имеет вид $\Psi(x) = Ax(a-x)$. Найдите среднюю кинетическую энергию частицы в этом состоянии, если масса частицы равна m_0.

5.6. В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид

$$\Psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) ,$$

где A и a — некоторые постоянные, а k — заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния средние значения координаты $\langle x \rangle$ и проекции импульса частицы $\langle p_x \rangle$.

5.7. В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$), имеет вид $\Psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{a}$. Найдите вероятность пребывания частицы в основном состоянии.

5.8. Найдите средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой ω_0 в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x) = A\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$, где A — некоторая постоянная, а m_0 — масса осциллятора

5.9. Докажите, что квадрат момента импульса частицы L^2 может быть одновременно измерим с кинетической энергией частицы E_K.
☞ **Указание.** Рассмотрите коммутатор операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{E}_K$.

5.10. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A\sin\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi x}{2a} .$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x,t)$ и среднюю кинетическую энергию частицы в данном состоянии.

5.11. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} .$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x, t)$ и среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.12. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} .$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x, t)$ и среднее значение кинетической энергии частицы в данном состоянии.

5.13. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{5\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} .$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x, t)$ и среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.14. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a является равновероятной суперпозицией второго и четвёртого возбуждённых состояний. Найдите волновую функцию $\Psi(x, t)$ и среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.15. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi = C\Psi_1 + C\Psi_2 ,$$

где C — некоторая константа, Ψ_1 — волновая функция основного состояния, а Ψ_2 — равновероятная суперпозиция основного и второго возбуждённого состояний. Найдите волновую функцию $\Psi(x, t)$ и среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.16. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} .$$

Найдите среднюю энергию частицы и вероятность её обнаружения в первом возбуждённом состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.17. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} \ .$$

Найдите среднее значение импульса частицы и вероятность её обнаружения во втором возбуждённом состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.18. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\Psi(x) = A \sin \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a} \ .$$

Найдите среднее значение координаты частицы и вероятность её обнаружения во втором возбуждённом состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.19. Определите результаты измерения проекции импульса L_z и вероятность их выпадения для системы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\Psi(\varphi) = A(1 + \sin 2\varphi) \ ,$$

где φ — азимутальный угол.

5.20. Определите результаты измерения проекции импульса L_z и вероятность их выпадения для системы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\Psi(\varphi) = A(1 + \cos 2\varphi) \ ,$$

где φ — азимутальный угол.

Электронная версия документа подготовлена с помощью издательской системы LaTeX 2_ε.
PDF версия получена с помощью программы pdfLaTeX версии 1.20a, входящей в состав проекта teTeX.
для набора использован тексовый редактор Vim (Vi IMproved) (`http://vim.org`)
операционная система OpenBSD (`http://OpenBSD.org`)
Все перечисленные программные продукты являются свободными и распространяются бесплатно по лицензиям GPL или BSD.

Гарнитура ComputerModern. Для поготовки документа использованы кириллические PostScript шрифты (Type I) сеймества cmsuper